Informations : Tous documents et calculatrices autorisés. Pas d'ordinateurs. Les points sont donnés si la réponse est juste précise et concise ; si la réponse comporte des phrases non pertinentes celles-ci ne sont pas prises en compte ; si une question ne paraît pas claire il faut la reformuler clairement (et écrire cette reformulation) avant de donner une réponse ; si l'utilisation d'autres notations que les officielles (celles que le texte introduit) s'avère nécessaire, il faut alors écrire la définition de ces nouvelles notations à partir des notations officielles avant de les utiliser.

Question 1

Dans le cadre des résolutions d'équations d'une variable réelle : *trouver x_∞ tel que*

$$f(x_\infty) = 0 \text{ où } f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

la méthode de la sécante consiste à approximer le terme en $f'(x_n)$ par $(f(x_n) - f(x_{n-1}))/(x_n - x_{n-1})$ de manière que la formule d'itération soit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})\, f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

a) [4 points] Écrire (en langage d'algorithme et soigneusement) l'algorithme de la méthode de la sécante.

Question 2

On donne les tableaux de Runge-Kutta

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	2/6	2/6	1/6

tableau 1

0	0	0	0	0
1/3	1/3	0	0	0
2/3	0	1/3	0	0
1	0	0	2/3	0
	1/4	1/4	1/4	1/4

tableau 2

b) [2 points] Écrire la formule d'itération (juste la formule pas l'algorithme) correspondant au tableau 1 pour un problème générique d'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \text{ avec } x(0) = x_0 \ \ (\text{où } f \ : \ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ )$$

c) [2 points] Écrire la formule d'itération correspondant au tableau 2 pour le problème de la question précédente. Quelle opération préalable faut-il faire sur le système pour répondre à la question ?

Question 3

On considère le système

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - \epsilon\, y^3 \\ x \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$\frac{dx}{dt} = -y - \varepsilon y^3 \ ; \ \frac{dy}{dt} = x$

d) [2 points] Calculer $\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2+y^2}{2} + \frac{\epsilon y^4}{4}\right)$. Que peut-on conclure du résultat ?

e) [2 points] On souhaite calculer la solution su système par une méthode d'Euler implicite. Écrire en langage d'algorithme les étapes nécessaires pour effectuer un pas.

Question 4

On considère le tableau de Runge-Kutta emboîtée d'ordre 2 et 1

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1
	1	0

f) [3 points] Écrire en langage d'algorithme, avec ce tableau particulier, l'algorithme de calcul de l'équation différentielle particulière

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \text{ avec } x(0) = x_0$$

en insistant sur la question de la validation du pas de temps.

g) [3 points] Écrire en langage d'algorithme, avec ce tableau particulier, l'algorithme de calcul de l'équation différentielle particulière

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - \epsilon\, y^3 \\ x \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

toujours en insistant sur la question de la validation du pas de temps.

Question 5

On donne l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + 1 = 0 \text{ avec } x(0) = 0 \ ; \ \frac{dx}{dt}(0) = 0 \ ; \ \frac{d^2x}{dt^2}(0) = 0$$

h) [2 points] La mettre sous une forme propre à être traitée par une méthode de Runge-Kutta.